Propagation of micro-unalyticities of solutions to some class of linear differential equations with non-involutive double characteristics(Functional-Analytic Study of Generalized Functions)

AUTHOR(S):

長谷川, 研二

数理解析研究所講究録
704巻 1989年 43-56

Propagation of micro-analyticities of solutions to some class of linear differential equations with non-involutive double characteristics

東大理　長谷川研二 (Kenji Hasegawa)

1. 概論

線型偏微分方程式の解のwave front set (singular spectrum)の構造については、微分作用素の主表象が単純特性的である場合は適当な接触変換を用いることによってかなり扱い易い型に直せるので殆んど最終的な結果が得られているが、多重特性的な場合は、特性集合の接触幾何的な構造が複雑で統一的な結果を期待することは非常に難かしいのが現状である。ところで、[2],[3]に於いて柏原−Laurent 両氏は第2超局所化という概念を開発して包合的集合に沿った2−microdifferential operator, 2-microfunctionを構成した。戸瀬氏は[7]に於いて包合的集合の上で2重特性的となる双曲型微分方程式の解の特異性伝播を論べた。また[6]の流儀に於いても[2],[3]に対応してLebeau氏が2-microsupportを定式化して、更にanalytic wave front setとの間に西瓜割りの定理を証明した。

この小論ではある非包合的集合の上で2重特性的となるある微分方程式の特異性伝播を解の2-microsupportを先験的

評価を用いて調べ、Holmgrenの定理を適用することによって導き出せるということを報告したい。

尚、この短報は既に[1]に掲載されている。

2 得られた結果

Ωを$\mathbb{R}^{n+1}$に於ける原点を含む開集合として、$(x_0, \cdots, x_n)$を$\mathbb{R}^{n+1}$の座標とする。次の方程式を用意する：

(1) $$P(x, D_x)u(x) = f(x),$$

ここで$D_x = -i\,\partial/\partial x$, $u(x), f(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$とする。$P(x, D_x)$は2階の微分作用素で係数は実解析的函数として、その主表象を$p_2(x, \xi)$と書く。k, lを$k+l<n$となる自然数として$(x'; \xi') = (x_1, \cdots, x_k; \xi_1, \cdots \xi_k)$, $(x''; \xi'') = (x_{k+1}, \cdots x_{k+l}; \xi_{k+1}, \cdots \xi_{k+l})$と置く。$p_2$は次の様な形になっているとする。

(2) $$p_2 = \xi_0^2 - a(x, \xi) + b(x, \xi).$$

ここでa, bは非負実数値函数でξ_0に依らない。更に$(0; 0, \cdots, 0, 1) \in T^*\mathbb{R}^{n+1}$の近傍で$a$は丁度2階の次数で0となり、$b$も$x'' = \xi'' = 0$で同様になっているとする。

$T^*\Omega$の2つの部分集合を次の様に定義する：

$\Lambda = \{(x; \xi) \mid x'' = \xi_0 = \xi' = \xi'' = 0\} \cap T^*\Omega$,

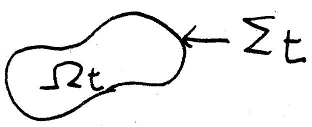
$\Gamma = \{(x; \xi) \mid x_i = 0, k+1 \leq i \leq n,\ \xi_i = 0\ 0 \leq i \leq n-1,\ \xi_n = 1\} \cap T^*\Omega$,

Λは$T^*\Omega$で非包合的であり、ΓはΛの接触幾何の意味での葉

層の1つである。(2)より P_2 は Λ 上で2重特性的となっている。Γ の座標を $(x_0,\dots,x_k)$ として $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ 上の点 $(x_0,\dots,x_k,0,\dots,0;0,\dots,0,1)$ と同一視をし、$T^*\Gamma$ の座標を $(x_0,\dots,x_k;\xi_0,\dots,\xi_k)$ と書く。$T^*\Gamma$ 上の函数 $q(x_0,x';\xi_0,\xi')$ を次の様に定義する:

(3) $q(x_0,x';\xi_0,\xi')=\xi_0^2-\sum_{1\le i,j\le k}\xi_i\xi_j\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}a(x_0,x',0;0,\dots,0,1)/2$.

$t>0$ に対して $S_t=\{(x_0,x')\in\Gamma \mid x_0=t\}$ と置き、S_t の部分集合 Σ_t を次の様に定義する; $(x_0,x')\in S_t$ に対してその点の $T^*\Gamma$ に於ける余接ファイバー上のある点があるHamiltonベクトル場の積分曲線によって $q(0;\xi_0,\xi')=0$ となる原点の余接ファイバーの点 $(0;\xi_0,\xi')$ と結ぶことができる時、$(x_0,x')\in\Sigma_t$ とする。更に Ω_t を $S_t\setminus\Sigma_t$ の相対コンパクトな連結成分とする。



得られた結果は次の通りである。

<u>定理1</u>　t_0,t_1 を $0<t_0\le t_1$ となる実数で

(4) $$\{x\in\mathbb{R}^{n+1} \mid (x_0,x')\in\bigcup_{0<t\le t_1}\Omega_t,\ x_i=0,\ k+1\le i\le n\}\Subset\Omega,$$

を満たす様にする。この時(1)に於ける $u(x)$ と $f(x)$ が、

(5) $$\overline{\bigcup_{0<t\le t_1}\Omega_t}\cap WF_a(f)=\phi,$$

(6) $$\Sigma_{t_1}\cap WF_a(u)=\phi,$$

(7) $$\bigcup_{0<t\le t_0}\Omega_t\cap WF_a(u)=\phi,$$

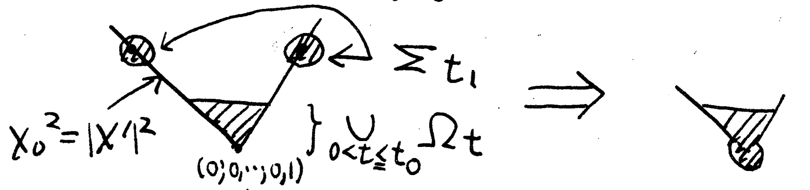
となるならば、

(8) $$(0;0,\cdots,0,1)\notin WF_a(u).$$

例えば $P_2=\xi_0^2-|\xi'|^2+|\xi''|^2+|x''|^2\xi_n^2$ とすると

$$\Omega_t=\{(x_0,x')\mid x_0=t,\ x_0^2=x'^2\},$$

となり定理1を適用すると下の図の様になる：



（斜線部とWFa(u)は交わらない）

もし仮定(7)の下で超局所双曲型方程式の解の正則性伝播に関する結果を適用しても $\bigcup_{0<t\le t_0}\Omega_t$ の法線方向は特性的となるので(8)を導びくことは不可能である。(6)の仮定より"解の正則性の伝播性"(2-microsupport)が Σ_{t_1} から原点まで伝わることを利用して証明する。

注意として $l=0$ の場合は[7]の論法より仮定(7)を緩めて解が正則となる集合が原点を集積点の1つとする様にしても(8)を導けることを指摘しておく。

3 2-microsupportとHolmgrenの定理

[5]に於ける第2超局所理論の復習をする。$u(x)$ を台がコンパクトなdistributionとすると、それに対して第2 Fourier-Bros-Iagolnitzer (F-B-I)変換 T_2 を次の様に定義する：

$$T_2 u(z,\lambda,\mu)=\int e^{-\lambda\mu^2(z^*-x^*)^2/2-\lambda(\mu z^t-x^t)^2/2-i\lambda x_n}u(x)dx,$$

ここで $z\in\mathbb{C}^{n+1}$, $\lambda,\mu>0$. $x^*=(x_0,\cdots,x_k)$, $x^t=(x_{k+1},\cdots,x_n)$ とする．Γ の座標も x^* と表わし、$T^*\Gamma$ の座標を $(x^*;\xi^*)$ とする。W を $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分開集合で $x^t=0$ と交わるとする。T_2 を使って W 上の distribution に対する Γ に沿った 2-microsupport SS^2_Γ を次の様に定義する：

<u>定義2</u>　$u(x)\in\mathcal{D}'(W)$ として，$(x_0^*;\xi_0^*)\in T^*\Gamma$ を $(x_0^*,0)\in W$ となる様に選ぶ．もし次の様なことが成り立てば $(x_0^*,\xi_0^*)\in SS^2_\Gamma(u)$ とする；$(x_0^*,0)$ の近傍で1となる $\chi(x)\in C_0^\infty(W)$ を固定する．ある $\varepsilon>0$ と $\lambda(\mu)$ が存在して，$\lambda\geqq\lambda(\mu)$ の時に

$$|T_2(\chi u)|\leqq e^{\lambda\mu^2(|\mathrm{Im}z|^2/2-\varepsilon)}$$

が $\mathbb{C}^{n+1}$ のある $(x_0^*-i\xi_0^*,0)$ の近傍 ω で成り立っている。

次の命題は 2-microsupport の有用性を示すものである：

<u>命題3</u>（Holmgren の定理）

$(x_0^*,0)$ を W に含まれる点として，$\phi(x^*)$ を Γ 上の実数値実解析函数で $\phi(x_0^*)=0$, $d\phi(x_0^*)\neq0$ となる様にする．もし $u(x)\in\mathcal{D}'(W)$ が

$$WF_a(u)\cap\Gamma\cap\{(x,\xi)\mid\phi(x^*)>0\}=\phi,$$

$$(x_0^*,0;0,\cdots,0,1)\in WF_a(u)$$

となるならば

$$(x_0^*; \pm d\varphi(x_0^*)) \in SS_\Gamma^2(u)$$

となる．

4　定理１の証明の概略

$\psi(z)$を$\mathbb{C}^{n+1}$上の連続函数として、$\psi(z)$に対して函数空間H_ψ^2を次の様に定義する；$u(z, \lambda, \mu)$が$z \in \mathbb{C}^{n+1}$に関して正則で$\lambda, \mu > 0$に対して連続，更に次の不等式を満す：任意の$\varepsilon > 0$に対してあるC_εが存在して

$$|u(z, \lambda, \mu)| \leqq C_\varepsilon e^{\lambda\mu^2(\psi(z)+\varepsilon)},$$

となる。H_ψ^2に次の様な同値関係を導入する；ある$\varepsilon > 0$が存在して

$$|u - v| \leqq e^{\lambda\mu^2(\psi(z)-\varepsilon)}$$

となる時$u \sim v$と書く．$u \in \mathcal{E}'$に対して$T_2(u) \in H^2_{|\mathrm{Im}\, z|^2/2}$となる．

またH_ψ^2の函数に作用する擬微分作用素を次の様に定義する．$a(z, \zeta, \lambda, \mu) \in H_\psi^2$（$\mathbb{C}_z^{n+1} \times \mathbb{C}_\zeta^{n+1}$の意味）に対して擬微分作用素$A$を$v \in H_\psi^2$に対して$Av$が

$$Av(z, \lambda, \mu) = \left(\frac{\lambda\mu^2}{2\pi}\right)^{n+1} \iint_{\Gamma(z)} e^{\lambda\mu^2(z-w)\zeta} a(z, \zeta, \lambda, \mu) v(w, \lambda, \mu) dw d\zeta,$$

となる様に決める，但し

$$\Gamma(z) = \{(w, \zeta) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \mid \zeta = -2i\partial_z \psi(z) + iT\overline{(z-w)}, |z-w| \leqq r\}$$

でTは十分大きく，rは十分小さくとる．以下aをAの表象と呼ぶ．

$x_0=(x_0^*;0)\in\Omega$を固定する．$\chi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$を$x_0$の近傍で1となる様に選ぶ．(1)の両辺に$\chi(x)$を掛け$T_2$を作用させる．(5)より右辺は$H^2_{|\mathrm{Im}z|^2/2}$の意味で0と同値となる．$v(z,\lambda,\mu)=T_2(\chi u)$と置くと$\xi_0^*\in\mathbb{R}^k$に対して$(x_0^*-i\xi_0^*,0)\in\mathbb{C}^{n+1}$の近傍$\omega$が存在して次の関係式を満たす：$\omega$上で

$$\tilde{P}v\sim T_2(\chi Pu),$$

但し$\tilde{P}$は擬微分作用素でその表象を$\tilde{p}(z,\zeta,\lambda,\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda\mu^2)^{-k}\times\tilde{p}_k(z,\zeta,\mu)$とすると

(9) $$\tilde{p}_0(z,\zeta,\mu)=\mu^4\zeta_0^2-a(z^*+i\mu^2\zeta^*,\mu z^t+i\mu\zeta^t;\mu^2\zeta^*,\mu\zeta^t+e_n)$$
$$+b(z^*+i\mu^2\zeta^*,\mu z^t+i\mu\zeta^t;\mu^2\zeta^*,\mu\zeta^t+e_n),$$

となる．よって(1)は次の方程式に帰着された：

(10) $$\tilde{P}v=F,$$

但し$F\sim 0$である．

$\tilde{p}_0$を$\mu=0$に沿ってTaylor展開すると

(11) $$\tilde{p}_0=\mu^2\tilde{b}(z,\zeta)+\mu^3c_1(z,\zeta)+\mu^4(\zeta_0^2-\tilde{a}(z^*,\zeta^*)+c_2(z,\zeta))+\mu^5 r(z,\zeta,\mu),$$

と書き直される．但し

$$\tilde{a}=\sum_{1\le i,j\le k}\zeta_i\zeta_j\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}a(z_0,\cdots,z_k,0;0,\cdots,0,1)/2,$$
$$\tilde{b}=\sum_{k+1\le i,j\le k+l}\zeta_i\zeta_j\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}b(z_0,\cdots,z_k,0;0,\cdots,0,1)/2$$
$$+\sum_{k+1\le i,j\le k+l}(z_i+i\zeta_i)(z_j+i\zeta_j)\partial_{x_i}\partial_{x_j}b(z_0,\cdots,z_k,0;0,\cdots,0,1)/2$$
$$+\sum_{k+1\le i,j\le k+l}(z_i+i\zeta_i)\zeta_j\partial_{x_i}\partial_{\xi_j}b(z_0,\cdots,z_k,0;0,\cdots,0,1)/2,$$

と置き、c_1,c_2は次の不等式を満たす：

$$|C_i(z,\zeta)| \leqq C(|z''|^2+|\zeta''|^2) \quad i=1,2.$$

ωを$\mathbb{C}^{n+1}$の開集合として、$\psi(z)$を実数値連続函数とする。ω上の函数のnorm $\|\ \ \|_{\psi,\omega,\lambda,\mu}$を次の様に定義する：

$$\|v\|^2_{\psi,\omega,\lambda,\mu}=\int_\omega e^{-2\lambda\mu^2\psi(z)}|v(z)|^2\,d\mu,$$

ここで$d\mu$は$\mathbb{C}^{n+1}$上のLebesgue測度である。$v(z,\lambda,\mu)$がzに関して正則でもし$\varepsilon>0$が存在して

$$\|v(\cdot,\lambda,\mu)\|_{\psi,\omega,\lambda,\mu}\leqq e^{\lambda\mu^2(\psi(z)-\varepsilon)}$$

がいえれば、H^2_ψの意味で$v\sim 0$となるのは容易にわかる。

(10)の解vが0と同値になる集合を調べる。$z_0\in\mathbb{C}^{n+1}$を固定して開集合ω_1,ω_2を$z_0\in\omega_1\Subset\omega_2$となる様に選ぶ。$\psi(z)\in C^2$に対して$\tilde{P}_\psi$を

$$\tilde{P}_\psi v(z,\lambda,\mu)=\tilde{p}_0(z,-2i\partial_z\psi(z),\lambda,\mu)\,v(z,\lambda,\mu),$$

と定義する。$\psi(z)$と$|\mathrm{Im}\,z|^2/2$との差のC^2-normが十分小さければ[6]と同じ論法を使うと

$$(12)\qquad \|\tilde{P}v-\tilde{P}_\psi v\|_{\psi,\omega_1}\leqq C(\lambda\mu^2)^{-1/2}\|v\|_{\psi,\omega_2},$$

が示せる。$\psi(z)$を$z\in\omega_2\setminus\omega_1$の時$\psi(z)>|\mathrm{Im}\,z|^2/2$で$z_0$のある近傍で$\psi(z)=|\mathrm{Im}\,z|^2/2$となる様に選ぶ。$z_0=(z_0^*,z_0',z_0'')\in\mathbb{C}^{k+1}\times\mathbb{C}^{\ell}\times\mathbb{C}^{n-k-\ell}$と書き直す。$z_0''\neq 0$の場合ある$c>0$が存在して

$$|\tilde{b}(z,-2i\partial_z\psi(z))|\geqq c$$

となることがbの条件よりわかる．よって(11)より

$$|\tilde{P}_0(z,-2i\partial_z\psi(z),\lambda,\mu)| \geqq c\mu^2, \quad \text{for } \lambda \geqq {}^{\exists}\lambda(\mu)$$

となるので

$$\|\tilde{P}_\psi v\|_{\psi,\omega_1} \geqq c\mu^2\|v\|_{\psi,\omega_1}$$

が得られる．(12)と結び付けると

$$\|v\|_{\psi,\omega_1} \leqq C(\mu^6\lambda)^{-1/2}\|v\|_{\psi,\omega_2} + C\mu^{-2}\|\tilde{P}v\|_{\psi,\omega_1}$$

がわかり $C(\mu^6\lambda)^{-1/2} < 1/2$ となるように $\lambda(\mu)$ を選べば $\lambda \geqq \lambda(\mu)$ の時に

$$(13) \qquad \|v\|_{\psi,\omega_1} \leqq C\|v\|_{\psi,\omega_2\setminus\omega_1} + C\mu^{-2}\|\tilde{P}v\|_{\psi,\omega_1}$$

が成り立つ．$\omega_2\setminus\omega_1$ で $\psi(z) > |\mathrm{Im}\, z|^2/2$ となるので $\|v\|_{\psi,\omega_2\setminus\omega_1}$ は急減少する．$\tilde{P}v$ も同様であるから $z_0'' \neq 0$ ならば z_0 の近傍で $H^2_{|\mathrm{Im}\, z|^2/2}$ の意味で $v \sim 0$ となる．

$z_0'' = 0$ で $q(\mathrm{Re}\, z^*, -\mathrm{Im}\, z^*) > 0$ の時は $\zeta_0^2 - \tilde{a}(z^*,\zeta^*)|_{\zeta^*=-\mathrm{Im}\, z} = q(\mathrm{Re}\, z^*, -\mathrm{Im}\, z^*) > 0$ となる．$\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ を $\mathbb{C}^{k+1}_{z^*}\times\mathbb{C}^{n-k-\ell}_{z'''}$ の開集合で $(z_0^*, z_0''') \in \tilde{\omega}_1 \Subset \tilde{\omega}_2$ となる様に選び $\tilde{\psi}(z^*, z''')$ を $(z^*, z''') \in \tilde{\omega}_2\setminus\tilde{\omega}_1$ の時 $\tilde{\psi} > (|\mathrm{Im}\, z^*|^2 + |\mathrm{Im}\, z'''|^2)/2$ となり，(z_0^*, z_0''') のある近傍で $\tilde{\psi} = (|\mathrm{Im}\, z^*|^2 + |\mathrm{Im}\, z'''|^2)/2$ となる様に選ぶ．$\psi'(z) = \tilde{\psi} + |\mathrm{Im}\, z''|^2/2$ と置き，$\tilde{\tilde{\omega}}_1, \tilde{\tilde{\omega}}_2$ を $0 \in \tilde{\tilde{\omega}}_1 \Subset \tilde{\tilde{\omega}}_2 \subset \mathbb{C}^\ell$ として $\omega_i = \tilde{\omega}_i \times \tilde{\tilde{\omega}}_i$ と置く．

bの条件より $\tilde{b}(z,-2i\partial_z\psi'(z)) \geqq 0$ であるから(11)より

$$|\tilde{P}_0(z,-2i\partial_z\psi(z),\mu)| \geqq \mu^2\tilde{b} + \mu^4\{\zeta_0^2 - \tilde{a}\}|_{\zeta=-2i\partial_z\psi(z)}\} - C\mu^5$$

$$\geq c\mu^4$$

が $\mu<<1$ で成り立つ．後は前の議論を使えば不等式(13)で ψ を Ψ に変えたものが成り立つ．$z''\notin\widetilde{\widetilde{\omega}}_1$ の時、前の結果より $v\sim 0$ がわかり、$(z^*_1,z''')\notin\widetilde{\omega}_1$ の時、$\psi'>|\mathrm{Im}\,z|^2/2$ であるから同様である。よって $\|v\|_{\psi',\omega_2\setminus\omega_1}$ は急減少することがわかるので v は z_0 の近傍で 0 と $H^2_{|\mathrm{Im}\,z|^2/2}$ の意味で 0 と同値となる．

以上のことをまとめると次の命題となる：

<u>命題4</u>　v を方程式(10)の解とすると $\{z\in\mathbb{C}^{n+1} \mid q(\mathrm{Re}\,z^*_1, -\mathrm{Im}\,z^*)>0$ あるいは $z''\neq 0\}$ では $H^2_{|\mathrm{Im}\,z|^2/2}$ の意味で $v\sim 0$ となる．

SS^2_Γ の定義を思い出すと次の系が得られる．

<u>系5</u>　$u(x)$ を方程式(1)の解とすると

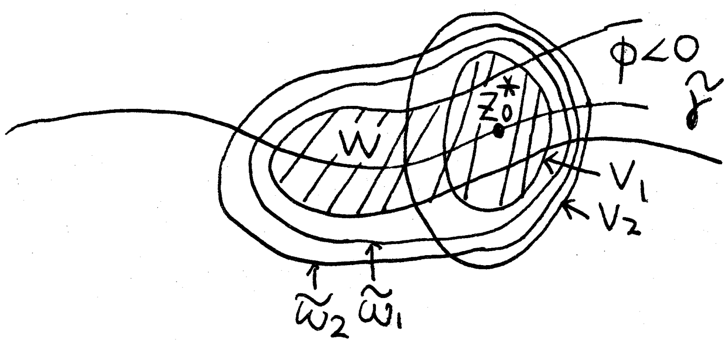
(14)　$$SS^2_\Gamma(u)\subset\{(x^*,\xi^*)\in T^*\Gamma \mid q(x^*,\xi^*)\leq 0\}.$$

次に $SS^2_\Gamma(u)$ の伝播について考察する．$SS^2_\Gamma(u)$ に含まれない点 $(x^*_0,\xi^*_0)\in T^*\Gamma$ を固定して，γ を (x^*_0,ξ^*_0) を通る H_q の積分曲線とする．H を $T^*\Gamma$ から $\mathbb{C}^{k+1}$ への写像で

$$H:\quad (x^*,\xi^*)\longmapsto x^*-i\xi^*$$

と定義する．H を使って $z^*_0=H(x^*_0,\xi^*_0)$，$\tilde{\gamma}=H(\gamma)$ と置く．V_1,V_2 を $\mathbb{C}^{k+1}$ の開集合で $z^*_0\in V_1\Subset V_2$ となり更に V_2 上で $v\sim 0$ となる様に選ぶ．$\phi(x^*,\xi^*)$ を $T^*\Gamma$ 上の実数値実解析函数で

集合 $\{z\in\mathbb{C}^{n+1} \mid \phi(H^{-1}(z^*))<0\}$ が V_2 に含まれない $\tilde{\gamma}$ のある点を含み、その点を含むその集合から V_2 を引いた集合の連結成分が相対コンパクトになる様に選ぶ. また下図の斜線部を W と置き、$\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2$ を $W\Subset\tilde{\omega}_1\Subset\tilde{\omega}_2$ で $\tilde{\omega}_2\setminus\tilde{\omega}_1$ と $\phi(H^{-1}(z))<0$ との交わりが V_2 に含まれる様に選ぶ



δ_1,δ_2 と $0<\delta_1<\delta_2$ となる実数としてそれに対して $\omega_i=\tilde{\omega}_i\times\{z^+\in\mathbb{C}^{n-k} \mid |z^+|<\delta_i\}$ と置く、$\hat{\phi}(z^*,\zeta^*)=\phi(z^*+i\zeta^*,\zeta^*)$ とすると $\hat{\phi}$ は $\zeta^*=-\mathrm{Im}\,z^*$ の時に実数値となる. $\hat{\phi}$ を使って次の Cauchy 問題を考える:

$$\begin{cases} -2\partial_t\Phi(t,z^*)+\hat{\phi}(z^*,-2i\partial_{z^*}\Phi(t,z^*))=0, \\ \Phi(0,z^*)=|\mathrm{Im}\,z^*|^2/2, \end{cases}$$

$t=0$ で Taylor 展開すると

(15) $$\Phi(t,z^*)=|\mathrm{Im}\,z^*|^2/2+t\hat{\phi}(z^*,-\mathrm{Im}\,z^*)/2+O(t^2),$$

が分る. 十分小さい $t,a>0$ に対して $\mathbb{C}^{n+1}$ の函数 $\Phi_{t,a}(z)$ を

$$\Phi_{t,a}(z)=\Phi(t,z^*)+|\mathrm{Im}\,z^+|^2/2+a|z'''|^2/2$$

とする. $\psi(z)\in C^2$ に対して $\Lambda_\psi=\{(z,\zeta) \mid \zeta=-2i\partial_z\psi(z)\}$ とおくと Hamilton-Jacobi 理論から

$$\Lambda_{\Phi_{t,a}} = \exp itH_{\tilde{\varphi}}(\Lambda_{\Phi_{0,a}})$$

が分る．$\exp itH_{\tilde{\varphi}}$ を $t=0$ で Taylor 展開すると $(\mathring{z}, \mathring{\zeta}) \in \Lambda_{\Phi_{t,a}}$ に対して $(z, \zeta) \in \Lambda_{\Phi_{0,a}}$ が存在して

$$\mathring{z}^* = z^* + it\, \partial_{\zeta^*}\tilde{\varphi}(z^*, \zeta^*) + O(t^2)$$

$$\mathring{\zeta}^* = \zeta^* - it\, \partial_{z^*}\tilde{\varphi}(z^*, \zeta^*) + O(t^2)$$

$$\mathring{z}^t = z^t, \quad \mathring{\zeta}^t = \zeta^t,$$

となる．

P.8 の $\widehat{P}_\Psi$ で $\Psi = \Phi_{t,a}$ とする．$A = \sup_{z^* \in \tilde{\omega}_2} |H_\varphi(H^{-1}(z))|$，$\varepsilon = \sup_{z^* \in \tilde{\omega}_2} |\varphi(H^{-1}(z))|$ と置くと $t > 0$ を十分小さくすると次の不等式が得られる：

$$\mathrm{Re}\,\widehat{P}_0(z, -2i\partial_z \Phi_{t,a}(z), \mu) \geqq c\mu^2 |z''|^2 - 2\varepsilon\mu^4,$$

$$\mathrm{Im}\,\widehat{P}_0(z, -2i\partial_z \Phi_{t,a}(z), \mu) \geqq tA\mu^4/2 - Ct|z''|^2\mu^2$$

但し $z \in \omega_2$ で c, C は定数で φ に依らない．φ に適当な定数を掛けてやり，$cA \geqq 16\varepsilon C$ となる様にすると ω_2 上で

$$|\widehat{P}_0(z, -2i\partial_z \Phi_{t,a}(z), \mu)| \geqq b\mu^4,$$

となる $b > 0$ が存在する．よって命題4で使われた議論をそのまま使うと，(13) で Ψ を $\Phi_{t,a}$ とした不等式が成り立つ．命題4より $z'' \neq 0$ の時 $H^2_{|\mathrm{Im}\, z|^2/2}$ の意味で $v \sim 0$ となるので t, a を十分小さくすると $H^2_{\Phi_{t,a}}$ の意味でもいえる．$z'' \neq 0$ の時は $|z''|$ に応じて t を十分小さくとれば $\Phi_{t,a} > |\mathrm{Im}\, z|^2/2$ となるので $H^2_{\Phi_{t,a}}$ の意味で $v \sim 0$ となる．したがって $|z^t| > \delta_1$ の時，

$H^2_{\Phi_{t,a}}$の意味で$v \sim 0$となる. $z^* \in \widehat{\omega}_2 \setminus \widehat{\omega}_1$の時は$\phi > 0$か$z^* \in V_2$となる。$\phi > 0$の時は$a$を十分小さくすれば$\Phi_{t,a} > |\mathrm{Im}\, z|^2/2$となるので$H^2_{\Phi_{t,a}}$の意味で$v \sim 0$となる. $z^* \in V_2$の時は$H^2_{|\mathrm{Im}\, z|^2/2}$の意味で$v \sim 0$となるので$H^2_{\Phi_{t,a}}$の意味でも同様である. 以上により$\omega_2 \setminus \omega_1$で$H^2_{\Phi_{t,a}}$の意味で$v \sim 0$となるので先験的不等式から$\omega_1$で$v \sim 0$となる. $z^t = 0$で$\phi(H^{-1}(z^*)) < 0$なら$\Phi_{t,a} < |\mathrm{Im}\, z|^2/2$となるのでそこで$H^2_{|\mathrm{Im}\, z|^2/2}$の意味で$v \sim 0$、つまり$SS^2_{\Gamma}(u) \cap W = \phi$が得られた.

以上により次の命題が得られる:

<u>命題6</u>　uを(1)の解として$(x_0^*, \xi_0^*) \in T^*\Gamma$を$(x_0^*, \xi_0^*) \in SS^2_{\Gamma}(u)$と仮定する. γを(x_0^*, ξ_0^*)を通るH_qの積分曲線とすると

$$\gamma \cap SS^2_{\Gamma}(u) = \phi,$$

となる.

系5と命題6から定理1を導く. $(0, \xi_0^*) \in T^*\Gamma$を$q(0, \xi_0^*) = 0$となる様にとる. γを$(0, \xi_0^*)$を通るH_qの積分曲線とすると$x_0 = t_1$の時仮定(6)よりγ上の点は$SS^2_{\Gamma}(u)$に含まれないことが分る. よって命題6より$(0, \xi_0^*) \notin SS^2_{\Gamma}(u)$が分る. 更に系5に注意すると次の様なことがわかる:

(16)　$\{(x^*, \xi^*) \in T^*\Gamma \mid x^* = 0,\ q(0, \xi^*) \geq 0\} \cap SS^2_{\Gamma}(u) = \phi.$

したがって(7)と(16)が成り立つことよりHolmgrenの定理(命題3)が適用できて(8)が導びける.

References

[1] Hasegawa, K., On the propagation of analyticity for some class of differential operators with non-involutive double characteristics. submitted to Proc. Japan Acad.

[2] Kashiwara, M. and Y. Laurent, Théorèmes d'annulation et deuxième microlocalisation. Prépublication d'Oray, Univ. Paris Sud. (1983).

[3] Laurent, Y., Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe. Progress in Mathematics, Vol. 53, Birkhäuser (1985).

[4] Lebeau, G., Deuxième microlocalisation à croissance. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1982-1983, exposé 15.

[5] Lebeau, G., Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 35-2, 145-216 (1985).

[6] Sjöstrand, J., Singularités analytiques microlocales. Astérisque 95, 1-166 (1982).

[7] Tose, N., 2nd microlocalization and conical refraction. Ann. Inst. Fourier 37-2 (1987).